ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 28
Α2. Σελίδα 87
Α3.

α. ΛΑΘΟΣ
β. ΣΩΣΤΟ
γ. ΛΑΘΟΣ

Α4.

α. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$

β. $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{v} = \frac{5+10+15+20+25}{5} = \frac{75}{5} = 15$

$R = t_{max} - t_{min} = 25 - 5 = 20$

Β2. $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{x})^2}{v} = \frac{(5-15)^2+(10-15)^2+(15-15)^2+(20-15)^2+(25-15)^2}{v} = \frac{250}{5} = 50$

Β3. $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{50} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{5\sqrt{2}}{15} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cong 0{,}47$$

Εφόσον $CV \geq 0{,}1$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3x^2 - 18x + \alpha$

Εφόσον ο ρυθμός μεταβολής της f για x=1 είναι ίσος με 0 ισχύει:

$$f'(1) = 0,$$

Επομένως

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow 3 - 18 + \alpha = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -15 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 15$

Γ2. $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15, f'(2) = -9$, $f(2) = 3$

λ = $f'(2) = -9$ η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής y=λx+β, αφού λ=-9 επομένως

$$\varepsilon\colon y = -9x + \beta$$

το Μ(2,f(2)) το οποίο ανήκει στην ευθεία την επαληθεύει επομένως

$3 = -9 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 21$

άρα η ευθεία που προκύπτει είναι η ε: $y = -9x + 21$

Γ3. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 15 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 6x + 5) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(x - 5)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = 1$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
f'	+	-	+	
f	↗	↘	↗	

Για $x \in (-\infty, 1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα

Για $x \in [1,5]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

Για $x \in [5, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα

Για x=1 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το

$f(1) = 1 - 9 + 15 + 1 = 8$

Για x=5 η παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το

$f(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 + 1 = 125 - 225 + 75 + 1 = -24$

Γ4. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f'(x)}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2-18x+15}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{3(x-5)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{3(x-5)}{x+1} = \frac{-12}{2} = -6$

ΘΕΜΑ Δ

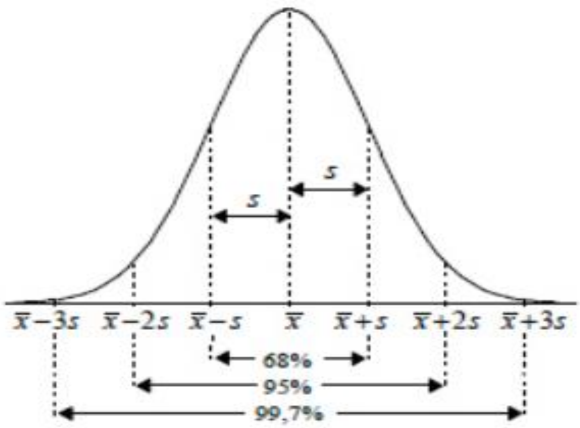
Δ1. Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$, επομένως $A_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{(x)' \cdot (x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Δ2. $f'(2) = \frac{1}{(2+1)^2} = \frac{1}{9}, f'(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$

Άρα $\bar{x} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9, s = \frac{1}{2f'(1)} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Δ3.



εφόσον οι παρατηρήσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή το ποσοστό των ατόμων που έχουν χρόνο επιστροφής από 5 έως 11 λεπτά είναι το 81,5%, επομένως : $\frac{81,5}{100} \cdot 2000 = 1630$ άτομα

ενώ το ποσοστό των ατόμων που έχουν χρόνο επιστροφής πάνω από 15 λεπτά είναι το 0,15%, δηλαδή: $\frac{0,15}{100} \cdot 2000 = 3$ άτομα

Δ4. Αν ο χρόνος επιστροφής των μαθητών αυξηθεί κατά 3 λεπτά τότε όλες οι νέες παρατηρήσεις που θα προκύψουν είναι της μορφής $y_i = x_i + 3$ συνεπώς

$\bar{y} = \bar{x} + 3 = 9 + 3 = 12$ ενώ $s_y = s_x = 2$