ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
3/06/2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
(Ενδεικτικές απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 133

Α2. Διατύπωση θεωρήματος σχολικού βιβλίου σελίδα 51

Α3. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 185

Α4. (α) Λάθος (β) Σωστό (γ) Σωστό (δ) Σωστό (ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. $A_{f\circ g}=\left\{x\in A_g \quad \text{και} \quad g(x)\in A_f\right\}$

Άρα $\boxed{x\geq 2}$ και $\sqrt{x-2}+1>1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}>0 \Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow \boxed{x>2}$

Επομένως $A_{f\circ g}=(2,+\infty)$ και

$$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=2\ln\left(\sqrt{x-2}+1-1\right)=2\ln\left(\sqrt{x-2}\right)=2\ln(x-2)^{\frac{1}{2}}=2\cdot\frac{1}{2}\ln(x-2)=\ln(x-2)$$

Β2. Έχουμε $h(x)=\ln(x-2), x\in(2,+\infty)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με παράγωγο $h'(x)=\dfrac{1}{x-2}>0$ για κάθε $x\in(2,+\infty)$

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1−1 οπότε αντιστρέφεται.

$$h(x)=y \Leftrightarrow \ln(x-2)=y \Leftrightarrow x-2=e^y \Leftrightarrow x=2+e^y, y\in\mathbb{R}$$

Επομένως $h^{-1}(x)=e^x+2, x\in\mathbb{R}$

Β3. Για το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\dfrac{f(x)}{x-2}\right)$ υπολογίζουμε πρώτα

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2\ln(x-1)}{x-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{D.L.H}}{=}}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{x-1}=2$

- $\lim\limits_{x\to 2}h(x)=\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2)=-\infty$,

  Αφού αν θέσουμε $u=x-2$ τότε όταν $x\to 2$ έχουμε $u\to 0^+$ άρα $\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2)=\lim\limits_{x\to 0}\ln u=-\infty$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\dfrac{f(x)}{x-2}\right)=-\infty$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ θα ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell,\ell\in\mathbb{R}$

Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}=\ell,\ell\in\mathbb{R}$ **(1)**

Αν $\kappa\neq 0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\kappa x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\kappa x=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } \kappa>0\\ & \text{ή}\\ -\infty, & \text{αν } \kappa<0\end{cases}$ σε κάθε περίπτωση άτοπο λόγω της **(1)**

Άρα $\boxed{\kappa=0}$

Για $\kappa=0$ σε κάθε περίπτωση και ανεξάρτητα από την τιμή του μ το όριο είναι μηδέν άρα πραγματικός αριθμός .

Αφού η $y=x$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f στο σημείο $O(0,0)$ θα ισχύει $f(0)=0$ και $f'(0)=1$

Η $f(x)=\dfrac{\mu x}{x^2+1}$ ικανοποιεί την σχέση $f(0)=0$

Βρίσκουμε την παράγωγο της f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{\mu\left(x^2+1\right)-\mu x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-\mu x^2+\mu}{\left(x^2+1\right)^2} \text{ και } f'(0)=1\Leftrightarrow \boxed{\mu=1}$$

Γ2. (i) Για $\kappa=0$ και $\mu=1$ έχουμε $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ και $f'(x)=\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow -x^2+1=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{ή} \\ x=-1 \end{cases}$$

Το πρόσημο της f' είναι το πρόσημο του $-x^2+1, x\in\mathbb{R}$ αφού $\left(x^2+1\right)^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	
$f(x)$	↘		↗		↘	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_1=(-\infty,-1]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_2=[-1,1]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_2=[1,+\infty)$

Στη θέση $x=-1$ έχει τοπικό ελάχιστο το $f(-1)=-\frac{1}{2}$ ενώ στη θέση $x=1$ έχει τοπικό μέγιστο το $f(1)=\frac{1}{2}$

(ii) Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(-\infty,-1]$ άρα

$$f(A_1)=\left[f(-1),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left[-\frac{1}{2},0\right)$$

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2=[-1,1]$ άρα

$$f(A_2)=\left[f(-1),f(1)\right]=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_3=[1,+\infty)$ άρα

$$f\left(A_3\right)=\left(\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right), f\left(1\right)\right]=\left(0,\frac{1}{2}\right]$$

Επομένως το σύνολο τιμών της είναι $f\left(A\right)=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

Ισχύει $-\frac{1}{2}\leq f\left(x\right)\leq\frac{1}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$,με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\alpha=0$

Η μέγιστη τιμή της f είναι το $\frac{1}{2}$ ενώ η μικρότερη τιμή της παράστασης $\alpha^2+\frac{1}{2}$ είναι το $\frac{1}{2}$ επομένως μόνο όταν $\alpha=0$ η εξίσωση $f\left(x\right)=\frac{1}{2}$ έχει μία μόνο ρίζα την $x=1$ ενώ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}^*$ η εξίσωση $f\left(x\right)=\alpha^2+\frac{1}{2}$ είναι αδύνατη

Γ3.

$$I_\nu+I_{\nu+1}=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}\left(1+x^2\right)}{x^2+1}dx=\int_0^1 x^{2\nu+1}dx=$$

$$=\left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1=\frac{1}{2\nu+2}$$

Για $\nu=0$ έχουμε $I_0=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$

Ισχύει : $I_\nu+I_{\nu+1}=\frac{1}{2\nu+2}$

Για $\nu=0$ έχουμε $I_0+I_1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow I_1=\frac{1}{2}-I_0\Leftrightarrow I_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$

Για $\nu=1$ έχουμε $I_1+I_2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow I_2=\frac{1}{4}-I_1\Leftrightarrow I_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2\Leftrightarrow I_2=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=g(x)+x$, $x\in\mathbb{R}$

Η h συνεχής στο $[-1,0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

(η g παραγωγίσιμη άρα και συνεχής)

$h(-1)=g(-1)-1<0$,αφού $0<g(x)<1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$h(0)=g(0)>0$,αφού $0<g(x)<1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Επομένως $h(-1)\cdot h(0)<0$,άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $h(x_1)=0 \Leftrightarrow \boxed{g(x_1)+x_1=0}$

Θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδικό

$h'(x)=g'(x)+1\neq 0$ και επειδή η g' συνεχής θα είναι και η h' συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε θα διατηρεί πρόσημο .

Άρα σε κάθε περίπτωση η h είναι γνησίως μονότονη άρα και 1-1 οπότε το x_1 μοναδικό .

Δ2. $f(x)=\begin{cases} x^2\big(g(x)+x\big), & x\in(-\infty,0) \\ 2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-\kappa x, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

Αφού η f παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής επομένως

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ από όπου προκύπτει εύκολα ότι $f(0)=0$

Η g παραγωγίσιμη στο $x=0$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$ **(1)**

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2\big(g(x)+x\big)}{x}=\lim_{x\to 0^-}x\big(g(x)+x\big)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-\kappa x}{x}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\left(2\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\kappa\right)=3-\kappa$$

Λόγω της (1) προκύπτει $3-\kappa=0\Leftrightarrow \kappa=3$

Δ3.(i) Για $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε $f(x) = 2ημx + εφx - 3x$

Η f παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $f'(x) = 2συνx + \frac{1}{συν^2 x} - 3$

$$f''(x) = -2ημx + \frac{2συνx \cdot ημx}{συν^4 x} = -2ημx + \frac{2ημx}{συν^3 x} = \frac{-2ημxσυν^3 x + 2ημx}{συν^3 x} = \frac{2ημx\left(1-συν^3 x\right)}{συν^3 x} > 0$$

για κάθε $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ αφού $συνx > 0$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $ημx > 0$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $1-συν^3 x > 0$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

και η f παραγωγίσιμη στο 0 οπότε $x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Η f συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $f(0) = 0$ επομένως

$x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ και λόγω του ότι $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

(ii) Η εξίσωση $3f(x) = \pi$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = \frac{\pi}{3}$

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

Αρχικά υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)$

Ισχύει : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(2ημx + εφx - 3x\right) = +\infty$ διότι

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} 2ημx = 1$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (-3x) = -\frac{3\pi}{2}$ και

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (εφx) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(ημx \cdot \frac{1}{συνx}\right) = +\infty$$

διότι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} συνx = 0$ και όταν $x\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε $συνx > 0$ άρα $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{συνx} = +\infty$

Άρα $A = \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο A έχουμε

$f(A) = \left[f(0), \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0,+\infty)$, Ο αριθμός $\frac{\pi}{3} \in f(A)$ άρα υπάρχει $x_2 \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ το οποίο είναι μοναδικό αφού η f 1-1 στο A

Δ4. (i) Επαναφέρουμε την συνάρτηση του **Δ1** $h(x) = g(x) + x$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 h(x)$ είναι μη αρνητική στο διάστημα $[x_1, 0]$,επειδή $x^2 \geq 0$ θα ασχοληθούμε με την $h(x)$

Ισχύει ότι $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ και επειδή η g' συνεχής θα είναι και η h' συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε θα διατηρεί πρόσημο .

Ισχύει $h(0) > 0$ και $h(-1) < 0$ δηλαδή $h(0) > h(-1)$ και επειδή είναι γνησίως μονότονη θα είναι η h γνησίως αύξουσα

Οπότε $x > x_1 \Leftrightarrow h(x) > h(x_1) \Leftrightarrow h(x) > 0$ άρα $f(x) = x^2 h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στα άκρα

Β τρόπος

Η h ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[x_1, 0]$ άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, 0)$ ώστε $h'(\xi) = \frac{h(0) - h(x_1)}{0 - x_1} = \frac{h(0)}{-x_1} > 0$ άρα αφού διατηρεί πρόσημο θα ισχύει $h'(x) > 0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα .

(ii) αφού $f(x) \geq 0$ για κάθε $\left[x_1, \frac{\pi}{3}\right]$ τότε $E(\Omega) = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$

και ισχύει $\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$ **(1)**

Παίρνουμε το κάθε μέλος της **(1)** ξεχωριστά

$$\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{0} x^2\left(g(x)+x\right)dx = \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx + \int_{x_1}^{0} x^3\,dx =$$

$$= \int_{x_1}^{0} \left(\frac{x^3}{3}\right)' g(x)\,dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0} = \left[\frac{x^3}{3} g(x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3} g'(x)\,dx - \frac{x_1^{\,4}}{4}$$

$$= \frac{x_1^{\,4}}{3} - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx - \frac{x_1^{\,4}}{4} = \frac{x_1^{\,4}}{12} - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$ έχουμε

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)\,dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Άρα από την (1) έχουμε :

$$-\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx - \frac{x_1^{\,4}}{12} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = \frac{x_1^{\,4}}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3$$

Σχόλιο : $g(x_1) + x_1 = 0 \Leftrightarrow g(x_1) = -x_1$

Β τρόπος

Αφού $f(x)\geq 0$ για κάθε $\left[x_1,\frac{\pi}{3}\right]$ τότε $E(\Omega)=\int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$

και ισχύει $\int_{x_1}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$ **(1)**

Παίρνουμε το κάθε μέλος της **(1)** ξεχωριστά

$$\int_{x_1}^{0} f(x)dx=\int_{x_1}^{0} x^2\left(g(x)+x\right)dx=\int_{x_1}^{0} x^2g(x)dx+\int_{x_1}^{0} x^3dx=\int_{x_1}^{0} x^2g(x)dx-\frac{x_1^{\ 4}}{4}\ \textbf{(1)}$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$ έχουμε

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x\right)dx=\left[-2\sigma\upsilon\nu x-\ln\left(\sigma\upsilon\nu x\right)-\frac{3}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}\ \textbf{(2)}$$

Από (1) και (2) προκύπτει :

$$\int_{x_1}^{0} x^2g(x)dx-\frac{x_1^{\ 4}}{4}=1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}\Leftrightarrow \boxed{\int_{x_1}^{0} x^2g(x)dx=1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}+\frac{x_1^{\ 4}}{4}}$$

Για το ζητούμενο ολοκλήρωμα έχουμε :

$$\int_{x_1}^{0} x^3g'(x)dx=\left[x^3g(x)\right]_{x_1}^{0}-\int_{x_1}^{0} 3x^2g(x)dx=\left[x^3g(x)\right]_{x_1}^{0}-3\int_{x_1}^{0} x^2g(x)dx$$

$$=-x_1^{\ 3}g(x_1)-3\int_{x_1}^{0} x^2g(x)dx=x_1^{\ 4}-3\int_{x_1}^{0} x^2g(x)dx=$$

$$=x_1^{\ 4}-3\left(1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}+\frac{x_1^{\ 4}}{4}\right)=x_1^{\ 4}-3-3\ln 2-\frac{\pi^2}{2}-\frac{3x_1^{\ 2}}{4}=-3-3\ln 2-\frac{\pi^2}{2}+\frac{x_1^{\ 2}}{4}$$